数理解析研究所講究録
254巻 1975年 1-23

Hamiltonian Systems

京大.教養. 今西英器

古典力学は、Lagrangeの方程式から出発して、Hamiltonの正準方程式、$\frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p^i}$, $\frac{dp^i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$ の形で定式化される。E. Cartan による微分形式の理論は、多様体上の微分解析を、座標によらないintrinsic な形で行うことを可能にし、Hamilton 系も大域的に定義できることとなった。ここでは古典理論との関連に、[4]に従って、注意しながら、大域的定式化により、Hamilton 系の、力学系としての特質が明らかになる様相を述べてみたい。局所理論と関連づけるため、大域的formula には、なるべく、局所表示も書くことにした。(証明に局所表示を用いることもある。より撤底した大域理論は[1],[2].)

本稿の構成は、次のようになっている。

§1. 接ベクトル空間と共変接ベクトル空間.

§2. 共変接ベクトル空間上の基本1形式 θ と2形式 Ω.

§3. Symplectic 多様体と Hamilton ベクトル場

§7 は筆者が解析力学を学んだ時、解りにくかったので、他の人もそうだろうという老婆心から書いたもので、本稿の本筋からは余分なことである。

なお考える多様体，写像，ベクトル場は全て C^∞ 級とする.

§1. 接ベクトル空間と共変接ベクトル空間.

力学の舞台である、位置・速度－相空間は、自然に多様体の接ベクトル空間と考えられる。他方、位置・運動量－相空間は、座標変換に対して、運動量成分が共変ベクトル成分として変換されるので、多様体の共変接ベクトル空間と考えられる。

<u>1.1</u>　M は n 次元多様体，$x \in M$ での接ベクトル空間を T_xM とする。$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$ を M の接ベクトル空間と言う. $\pi : TM \to M$ が、$\pi(\xi) = x$ for $\xi \in T_xM$. として定まる。(U, α), $\alpha(x) = (x^1(x), \cdots, x^n(x))$ を M の局所座標とする. $(\pi^{-1}(U), T\alpha)$ を $\xi \in \pi^{-1}(U)$ に対し、
$T\alpha(\xi) = (\xi^1(\xi), \cdots, \xi^n(\xi), \dot{\xi}^1(\xi), \cdots, \dot{\xi}^n(\xi)) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\xi^i(\xi) = x^i(\pi(\xi))$,
$\xi = \sum \dot{\xi}^i(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(\xi)}$ で定義すると、TM は $(\pi^{-1}(U), T\alpha)$ を局所

座標とする $2n$ 次元多様体となる．

1.2　T_x^*M を T_xM の双対空間とする．$T^*M=\bigcup_{x\in M}T_x^*M$ を M の共変接ベクトル空間と言う．$\pi: T^*M\longrightarrow M$ が (1.1) と同様に定義される．$(\pi^{-1}(U), T^*\alpha)$ を $T^*\alpha(\ell)=(q_1(\ell)\cdots q_n(\ell), p_1(\ell)\cdots p_n(\ell))$，$q_i(\ell)=x^i(\pi(\ell))$，$\ell=\sum p_i(\ell)(dx^i)_{\pi(\ell)}$ で定義すると、T^*M も $2n$ 次元多様体となる．

TM と T^*M は微分同相ではあるが自然な同相写像はない．力学系の運動エネルギーが速度成分の二次形式の場合は，(1.4) で定義される $\mathcal{L}_g$ が古典的な Legendre 変換である（§7）．

1.3　M の Riemann計量 g とは，各 T_xM に内積 $\langle\ ,\ \rangle_g$ を定めることを言う．(U,α) では $T\alpha(\xi_i)=(q^1\cdots q^n, \dot{q}_i^1\cdots\dot{q}_i^n)$ $i=1,2$, に対し，$\langle\xi_1,\xi_2\rangle_g=\sum_{i,j}g_{ij}(x)\dot{q}_1^i\dot{q}_2^j$，$x=\pi(\xi_i)$ で，$(g_{ij}(x))$ は U で微分可能な正定値対称行列となる．$\|\xi\|^2=\langle\xi,\xi\rangle_g$ とおく．

1.4　Riemann計量 g により $\mathcal{L}_g: TM\longrightarrow T^*M$ が $\mathcal{L}_g(\xi)(\eta)=\langle\xi,\eta\rangle_g$，$\xi,\eta\in T_xM$ として定まる．$\mathcal{L}_g$ は微分同相で $\pi\circ\mathcal{L}_g=\pi$ である。局所的には $\mathcal{L}_g(q^1,\cdots,q^n,\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n)=(q_1,\cdots,q_n,\sum_j g_{1j}\dot{q}^j,\cdots,\sum_j g_{nj}\dot{q}^j)$ と表わされる．

1.5　T_x^*M の内積を $\langle\ell_1,\ell_2\rangle_g=\langle\mathcal{L}_g^{-1}(\ell_1),\mathcal{L}_g^{-1}(\ell_2)\rangle$ で定義する。$T_x^*M\ni\ell$ のノルムを $\|\ell\|^2=\langle\ell,\ell\rangle_g$ と定める。

1.6.　g_i を M_i の Riemann計量 $(i=1,2)$．$\varphi: M_1\longrightarrow M_2$ を微分同相とする．φ が計量を保てば（即ち $\langle T\varphi(\xi_1),T\varphi(\xi_2)\rangle_{g_2}=\langle\xi_1,\xi_2\rangle_{g_1}$）

$T^*\varphi\circ\mathcal{L}_{g_1}=\mathcal{L}_{g_2}\circ T\varphi$ となる（$T\varphi, T^*\varphi$ の定義は (A.3.7) (A.3.8)）.

M 上のベクトル場から TM, T^*M 上のベクトル場を以下のように定める. (1.9) の T^*X は Hamilton 場であり (2.6), 保存則との関連 (4.2) で重要である.

1.7　X を M 上のベクトル場, $\{\varphi_t\}$ を解とする. $\{T\varphi_t\}$ は TM 上の flow であるが, $\{T\varphi_t\}$ を生成する TM 上のベクトル場を TX で表わす. 局所的には $X=\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ に対し, TX の方程式は,

$$\frac{dq^i}{dt}=X^i(q^1,\cdots,q^n)\ \text{----}\ (a)\qquad \frac{d\dot{q}^i}{dt}=\sum_j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\dot{q}^j\ \text{---}\ (b)$$

(b) を (a) の変分方程式と言う。((a) の解の初期値に関する微分を (b) の解が表わす.) 明らかに $T\pi(TX)_\xi=X_{\pi(\xi)}$ である。

1.8　特に $X_x=0$ の時 (b) は (a) の線形近似となっている。この時, $X'_x(\xi)=\lim_{t\to0}(T\varphi_t(\xi)-\xi)/t$ とおくと X'_x は T_xM の線形変換で, X'_x の固有値を, X の x での特性指数と言う.

1.9　T^*M 上でも同様に $\{T^*\varphi_t\}$ がベクトル場 T^*X を生成し, $(T\pi)(T^*X)_\ell=X_{\pi(\ell)}$ となる。T^*X は局所的には

$$\frac{dq_i}{dt}=X^i(q_1,\cdots,q_n)\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\sum_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}p_j$$

と表わされる。

§2.　共変接ベクトル空間上の基本1形式 θ と 2形式 Ω.

2.1　$T_x^*M\ni\ell$, $T_\ell(T^*M)\ni\xi$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \xi\in T(T^*M) & \xrightarrow{\pi} & T^*M\ni\ell \\ {\scriptstyle T\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ TM & \xrightarrow{\pi} & M\ni x \end{array}$$

$T\pi(\xi)\in T_xM$ であり, $\theta_\ell(\xi)=\ell(T\pi(\xi))\in\mathbb{R}$ と定義すると, θ_ℓ は $T_\ell(T^*M)$ 上の

1次形式となり．$\ell \mapsto \theta_\ell$ という対応は T^*M 上の微分1形式を定める．これを θ で表わし T^*M の基本1形式と言う．

2.2. 局所座標では．$\ell=\sum p_j(\ell)(dx^j)_x$ とすると．$T\pi\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_\ell = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$，$T\pi\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell=0$ より．$\theta_\ell\left(\left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)_\ell\right)=\ell\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = p_i(\ell)$，$\theta_\ell\left(\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell\right)=0$．従って．$\theta=\sum p_i\, dq_i$ と表わされる。

2.3. 定理 (i) T^*M_i $(i=1,2)$ 上の基本1形式を θ_i とする．微分同相 $\varphi: M_1\longrightarrow M_2$ に対し．$(T^*\varphi)^*\theta_2=\theta_1$ となる。

(ii) X を M 上のベクトル場．θ を T^*M の基本1形式とすると．

$L_{T^*X}\theta=0$

証明 i) $\pi_i: T^*M_i\longrightarrow M_i$ とする．θ_i の定義と (A.3.8), (A.3.9) より $\xi\in T_\ell(T^*M_1)$ に対し．$((T^*\varphi)^*\theta_2)_\ell(\xi) = (\theta_2)_{T^*\varphi(\ell)}((T^*\varphi)_*\xi)$

$=(T^*\varphi(\ell))(T\pi_2\circ T(T^*\varphi)\xi) = (T^*\varphi(\ell))(T(\pi_2\circ T^*\varphi)\xi)$

$=(T^*\varphi(\ell))(T(\varphi\circ\pi_1)\xi) = ((\varphi^{-1})^*\ell)(T\varphi\circ T\pi_1(\xi)) = \ell(T\pi_1(\xi)) = (\theta_1)_\ell(\xi)$.

ii) は i) と T^*X 及び Lie 微分の定義 (A.3.11) より明らか．

2.4 T^*M 上の基本2形式 Ω を．$\Omega=-d\theta$ で定義する。局所的には $\Omega=\sum dq_i\wedge dp_i$ と表わされ．Ω_ℓ は $T_\ell T^*M$ 上の Symplectic 形式となる (A.2.2).

2.5. 定理 (i) T^*M_i上の基本2形式をΩ_i，$\varphi: M_1\longrightarrow M_2$ を微分同相とすると．$(T^*\varphi)^*\Omega_2=\Omega_1$.

(ii) X を M 上のベクトル場とすると．$L_{T^*X}\Omega=0$

証明は (2.3) と (A.3.10) より明らか．

2.6. M上のベクトル場 X に対し、$f_X : T^*M \to \mathbb{R}$ を $f_X(\ell) = \theta_\ell((T^*X)_\ell)$ で定義すると $df_X = T^*X \lrcorner \Omega$ となる。f_X を X の momentum関数と言う(§4参照)。局所的には $X = \Sigma X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\ell = \Sigma p_i dx^i$ に対し、$f_X(\ell) = \Sigma X^i(\pi(\ell)) p_i(\ell)$ と表わされる。

証明 (2.3)と(A.3.11)より、$0 = L_{T^*X}\theta = T^*X \lrcorner d\theta + d(T^*X \lrcorner \theta)$ $= -T^*X \lrcorner \Omega + d(\theta(T^*X))$.

§3. Symplectic多様体とHamiltonベクトル場.

(T^*M, Ω) の性質を抽象してSymplectic多様体を定義し、その上でHamiltonベクトル場という概念を考える。

3.1. N は $2n$-次元多様体、Ω が N 上の2形式で次の性質をもつ時、(N, Ω) をSymplectic多様体と言う。

(i) $d\Omega = 0$.

(ii) Ω_x は T_xN 上のSymplectic形式

3.2. Darbouxの定理 (N, Ω) がSymplectic多様体なら、$^\forall x \in N$ の局所座標 $(q^1(x), \cdots, q^n(x), p^1(x), \cdots, p^n(x))$ がとれて、$\Omega_x = \Sigma (dq^i)_x \wedge (dp^i)_x$ と表わされる。(証明は[1],[2],[7]参照).

この定理より、(N, Ω) は局所的には、(T^*M, Ω) と同じものであることが分る。以下座標は常にこのようなものをとる。

3.3. 定理 ベクトル場 X に $\omega_X = X \lrcorner \Omega$ を対応させると、N 上のベクトル場と1形式が1:1に対応する。ω に対応する、べ

クトル場を ω_X で表わす.

証明はSymplectic形式の定義で明らか. 局所座標では, $X=\sum\left(A_i\frac{\partial}{\partial q^i}+B_i\frac{\partial}{\partial p^i}\right)$ に対し, $\omega_X=\sum(-B^i dq^i+A^i dp^i)$ ((A.2.1), (A.2.2)). 従って $\omega=\sum(a_i dq^i+b_i dp^i)$ に対し, $X_\omega=\sum\left(b_i\frac{\partial}{\partial q^i}-a_i\frac{\partial}{\partial p^i}\right)$.

<u>3.4.</u> N 上の閉1形式 ω に対応する X_ω を局所Hamilton場と言う. 特に N 上の関数 F に対し, X_{dF} を F をHamiltonianとするHamilton場と言う. 局所的には $dF=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}dq^i+\frac{\partial F}{\partial p^i}dp^i\right)$ だから, (3.3)により X_{dF} に対応する微分方程式は,

$$\frac{dq^i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p^i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial q^i}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

という, 古典的な正準方程式となる.

<u>3.5. 定理</u> X_ω が局所Hamilton場 $\Longleftrightarrow$ $L_{X_\omega}\Omega=0$. 即ち X_ω の解 $\{\varphi_t\}$ は Ω を不変にする。

<u>証明</u> (A.3.11)より, $L_{X_\omega}\Omega=X_\omega\lrcorner d\Omega+d(X_\omega\lrcorner\Omega)=d\omega$.

(3.5)はHamilton場の力学系としての特質を調べるのに重要である(§5). 歴史的にはHamilton場の第一積分を求めることが大きな問題であったが, 積分の性質を調べるのに, Poisson bracketが有用である。

<u>3.6.</u> N 上の関数 F, G のPoisson bracketを $\{F,G\}=\Omega(X_{dF},X_{dG})$ で定義する。局所的に $X_{dF}=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}\right)$, $X_{dG}=\sum(\cdots)$ だから, $\{F,G\}=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p^i}-\frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial G}{\partial q^i}\right)$ と表わせる(A.1.2).

<u>3.7. 定理</u> (i) $[X_{dF},X_{dG}]=-X_{d\{F,G\}}$.

(ii) $\{F, G\} = X_{dG}F$. 即ち $\{F, G\}$ は X_{dG} に沿っての F の変化.

証明　(ii) は局所表現より明らか. (i) は (ii) と (A.3.11), (3.5) より

$$[X_{dF}, X_{dG}] \lrcorner \Omega = L_{X_{dF}}(X_{dG} \lrcorner \Omega) - X_{dG} \lrcorner (L_{X_{dF}} \Omega)$$

$$= L_{X_{dF}}(dG) = d(L_{X_{dF}} G) = d(X_{dF} G) = -d\{F, G\}.$$

3.8. 系 (i) N 上の Hamilton 場, 関数の集合は, それぞれ $[\ ,\ ]$, $\{\ ,\ \}$ により Lie algebra となる.

(ii) $X_{dF}G = 0 \Leftrightarrow X_{dG}F = 0 \Leftrightarrow \{F, G\} = 0$. 特に F は X_{dF} の積分となっている (全エネルギーの保存則).

(iii) $X_{dH}F = X_{dH}G = 0 \Rightarrow X_{dH}\{F, G\} = 0$. 即ち, F, G が X_{dH} の積分なら, $\{F, G\}$ もそうである。

証明　(i), (ii) は (3.7) より明らか. (iii) は Jacobi 律 $\{H, \{F, G\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$ と (ii) により明らか.

§4. 力学の保存則と対称性.

ここでは, Hamilton 系のもつ対称性が, 保存則を生じることを, もっと一般な定式化も可能だが ([1] 参照), 古典的な場合について述べ, 簡単な例をあげる。

4.1　位置空間 M に Riemann 計量 g が定義され, 運動エネルギーが $\frac{1}{2}\|\xi\|^2$, $\xi \in TM$ と表わされ, ポテンシャル $V: M \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する場合. T^*M 上の Hamiltonian は $H = K + \bar{V}$, $K(\ell) = \frac{1}{2}\|\ell\|^2$, $\bar{V} = V \circ \pi$ となり X_{dH} が運動を記述する (7.7).

<u>4.2. 定理</u> Y を M 上のベクトル場，$\{\varphi_t\}$ を Y の解とする。φ_t が M の等長変換で，U を不変にするなら momentum 関数 f_Y は，X_{dH} の積分である。

<u>証明</u> (2.6) により，$T^*Y = X_{df_Y}$ である。従って (3.8)(iii) より，$T^*Y(H)=0$ を示せば良い。$\langle \varphi_t^* l, \varphi_t^* l\rangle_g = \langle l, l\rangle_g$ より，$K(T^*\varphi_t(l)) = K(l)$，従って $(T^*Y)K=0$，又，$(T^*Y)\bar{U} = (d\pi^* U)(T^*Y) = dU(T\pi\circ T^*Y) = dU(Y) = Y(U) = 0$，従って $(T^*Y)H=0$．

<u>4.3. 系</u> M に k 次元 Lie 群 G が，等長且つ U-不変に作用していれば，X_{dH} の k 個の積分が存在する。

証明は，G の Lie 環の基は，(4.2) をみたす k 個の M 上のベクトル場を定めることから明らかである。

<u>4.4. 中心力問題</u> $\mathbb{R}^3$ の中を質量 m の質点が，原点からの距離の関数であるポテンシャルの下で運動する時，$M=\mathbb{R}^3-\{0\}\ni(x,y,z)$，$TM = M\times\mathbb{R}^3 \ni \xi = (x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z)$，$T^*M = M\times(\mathbb{R}^3)^*\ni l = (q_x,q_y,q_z,p_x,p_y,p_z)$．Riemann 計量は，$\|\xi\|^2 = m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)$ ととり，$\mathcal{L}_g(\xi)=l$ とすると，(1.4)(1.5) より，$q_x=x$, $q_y=y$, $q_z=z$, $p_x=m\dot x$, $p_y=m\dot y$, $p_z=m\dot z$ となり，更に $\|l\|^2=\frac{1}{m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$ となる。ポテンシャルは，$U(x,y,z)=U(r)$ $r^2=x^2+y^2+z^2$ であるから，Hamiltonian は $H(l)=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(\sqrt{q_x^2+q_y^2+q_z^2})$．$M$ には，3次元回転群 $SO(3)$ が等長・U 不変に働く，$Z = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$，$X = y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}$，$Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ は (4.2) をみたし，$f_Z = q_xp_y-q_yp_x$，$f_X = q_yp_z-q_zp_y$，$f_Y = q_zp_x-q_xp_z$

は X_{dH} の積分である（角運動量の保存則）. $\mathbb{x}=(x,y,z)$, $\mathbb{P}=(P_x,P_y,P_z)$ とおくと. 上の３つの式は $\mathbb{x}\times\mathbb{P}=\mathbb{C}=$ 定ベクトル. を表わし. $\mathbb{x}$ と $\mathbb{P}$ は（$\mathbb{C}\neq 0$ なら）定平面を張る. 特に. $\mathbb{x}$ は定平面上を運動することが分る。上の３つの積分に、エネルギー積分 H を考えると. 問題は２次元曲面上の微分方程式に帰着される。

4.5. <u>n体問題</u>. $\mathbb{R}^3$ の中を質量 $m_1, m_2, \cdots m_n$ の質点が、相互の距離の関数であるポテンシャルの下で運動する時. $M=\mathbb{R}^3-\Delta \ni a = (a^1, \cdots, a^n)$, $a^i=(x^i, y^i, z^i)$. $\Delta = \{a \mid a^i = a^j \ i\neq j\}$, $TM = M\times(\mathbb{R}^3)^n \ni (a, \dot{a}) = (a^1, \cdots, a^n, \dot{a}^1, \cdots, \dot{a}^n)$ $\dot{a}^i = (\dot{x}^i, \dot{y}^i, \dot{z}^i)$ で表わす. T^*M についても (4.4) と同様. Riemann 計量は. $\|(a, \dot{a})\|^2 = \sum m_i \|\dot{a}^i\|^2 = \sum m_i\{(\dot{x}^i)^2+(\dot{y}^i)^2+(\dot{z}^i)^2\}$. ポテンシャルは. $U(a) = P(\|a_i - a_j\|_{i<j})$ という形である。M には３次元 Euclid 運動群が $g\cdot a = (g\cdot a^1, \cdots, g\cdot a^n)$ として等長. U-不変に働く. 従って６個の積分が存在する. 具体的には $X_x = \sum \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X_y = \sum \frac{\partial}{\partial y^i}$, $X_z = \sum \frac{\partial}{\partial z^i}$, $Y_x = \sum \left(y_i \frac{\partial}{\partial z^i} - z^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$, $Y_y = \sum \left(z^i \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial z^i}\right)$. $Y_z = \sum \left(x^i \frac{\partial}{\partial y^i} - y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ の momentum 関数 $\sum P_{x^i}$, $\sum P_{y^i}$, $\sum P_{z^i}$（線運動量）, $\sum(q_{y^i}P_{z^i} - q_{z^i}P_{y^i})$ $\sum(q_{z^i}P_{x^i} - q_{x^i}P_{z^i})$, $\sum(q_{x^i}P_{y^i} - q_{y^i}P_{x^i})$（角運動量）が保存される。この他に $P_{x^i} = m_i \dot{x}_i \cdots\cdots$ という関係と $\sum P_{x^i} = \mathrm{const}$. から. $\underbrace{\text{重心}}_{\sum m_i x_i}$ の等速直線運動 という一種の保存則が従うが.

これは運動方程式が Galilei 群により不変であることの反映

である。

§5. 力学系としての Hamilton 系の特質.

Hamilton 系の力学系としての特質は全て flow が Symplectic 形式を保つことと (3.5) から導かれる。ここでそのいくつかの帰結を述べる。この節では (N, Ω) は $2n$ 次元 Symplectic 多様体. H は Hamiltonian で $\{\varphi_t\}$ を $X = X_{dH}$ の解とする.

5.1. 定理　$\omega_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}/n! \cdot \underbrace{\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{n}$ は N 上の体積要素であるが. $\{\varphi_t\}$ はこの体積を保つ. 即ち $N \supset A$ に対し $\int_A \omega_0 = \int_{\varphi_t(A)} \omega_0$. ω_0 は局所的には $dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \cdots \wedge dp^n$ と表わされる.

証明は (3.5) と (A.3.11) より明らか.

5.2. 定理　X の k 個の積分 $F_1, \cdots, F_k$ は $F: N \longrightarrow \mathbb{R}^k$ を定めるが. $\mathbb{R}^k \ni c$ が F の regular value, 即ち. $(dF_1)_x, \cdots, (dF_k)_x$ が $\forall x \in \Sigma_c = F^{-1}(c)$ で一次独立, なら Σ_c は $(2n-k)$-次元多様体となるが. Σ_c 上に体積要素 ω_c が存在して. $X|\Sigma_c$ は ω_c を不変にする.

証明　Σ_c の近傍で $dF_1, \cdots, dF_k$ は一次独立だから. $dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_k \wedge \omega = \omega_0$ となる $(2n-k)$-形式 ω が存在する. $L_X dF_i = 0$ より. $dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_k \wedge L_X \omega = L_X \omega_0 = 0$. 従って $L_X \omega$ は $dF_1, \cdots, dF_k$ で生成される ideal に入っている. ω を Σ_c に制限したものを ω_c とおけば Σ_c 上では $L_X \omega_c = 0$ となる。

次の系は. 古典的には Jacobi の最終乗積の理論である.

5.3 系 (i) Σ_c 上の体積要素 ω_c, ω_c' が (5.2) をみたすとする. $\omega_c' = f\omega_c$ と表わせるが. この時 f は $X|\Sigma_c$ の積分である。

(ii) Σ_c が2次元曲面の時. $X \lrcorner\, \omega_c$ は閉1形式で局所的には. $X \lrcorner\, \omega_c = dG$ と表わされるが、G も局所的な $X|\Sigma_c$ の積分であり. 元の方程式は局所的に解ける,

証明 (ii) Σ_c 上で. $0 = L_X \omega_c = d(X \lrcorner\, \omega_c)$. 従って $X \lrcorner\, \omega_c = dG$.
$X(G) = X \lrcorner\, dG = X \lrcorner\, (X \lrcorner\, \omega_c) = 0$ より G は $X|\Sigma_c$ の積分.
(i) $0 = L_X(f\omega_c) = L_X f \cdot \omega_c + f \cdot L_X \omega_c = X(f) \cdot \omega_c = 0$ より $X(f) = 0$.

5.4. Poincaré の回帰定理 (5.2) で更に $\int_{\Sigma_c} \omega_c$ は有限. $X|\Sigma_c$ の任意の解は $-\infty < t < \infty$ で定義されているとする. この時 $\forall \tau \in R$ に対し. Σ_c の測度0の集合以外の点 P で $P = \lim_{n_i \to \infty} \varphi_{\tau n_i} P$ となる数列 $\{n_i\}$ がとれる。特に φ_τ の non-wandering set は Σ_c である.

証明は例えば [6] §37 参照.

5.5. X の特異点の特性指数は. $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ が同じ重複度で現われる. 特に純虚数が重複度1で現われれば. H を少し変えても同じことが言える.

証明 x を特異点とする. $\xi, \eta \in T_x N$ に対し (3.5) より.
$\Omega_x(T\varphi_t \xi, T\varphi_t \eta) = \Omega_x(\xi, \eta)$ $\therefore$ $0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\Omega_x(T\varphi_t \xi, T\varphi_t \eta) - \Omega_x(\xi, \eta))$
$= \Omega_x(X_x' \xi, \eta) + \Omega_x(\xi, X_x' \eta)$ より X_x' は無限小 Symplectic 変換となり. (A.2.4) により (5.5) が言える.

5.6 γ を X の閉軌道, $x \in \gamma$ での Poincaré map を Θ とする.

$(T\Theta)_x$ の固有値は、1 が奇数の重複度で、$\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda}$ が同じ重複度で現われる。

証明　Σ を Θ を定義する γ の local section とする。$(T\Theta)_x \oplus 1$: $T_x\Sigma \oplus \mathbb{R} \longrightarrow T_x\Sigma \oplus \mathbb{R}$ は $(T\varphi_\tau)_x : T_xN \longrightarrow T_xN$ (τ は γ の周期) と共役で、$(T\varphi_\tau)_x$ は Symplectic 変換だから (A.2.3) より (5.6) が言える。

§6　時間を含む Hamilton 系と正準変換

正準変換の理論は古典力学の頂点とも言えるのだが、generating function 等は大域的な定式化は難かしい。ここでは (3.5) を Hamiltonian H が時間の関数でもある場合に拡張するための手段という立場でのみ扱うことにする。

6.1.　(N, Ω) は $2n$ 次元 Symplectic 多様体。$\pi : N\times\mathbb{R} \to N$ を射影、$\omega = \pi^*\Omega$、$t : N\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ も射影とする。$H : N\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を Hamiltonian とする Hamilton 場 $\bar{X}$ とは $N\times\mathbb{R}$ 上のベクトル場で、

(1)　$\bar{X}(t) \equiv 1$,　　(2)　$\bar{X} \lrcorner (\omega + dH\wedge dt) = 0$

をみたすものを言う。

6.2.　上の (1), (2) は、(1) と $\bar{X} \lrcorner \omega = dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt$ と同値である。局所座標では $\bar{X} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$，微分方程式の形では、$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}$，$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$ という形で表わされる。

証明　(1), (2) より $\bar{X} \lrcorner \omega = -(\bar{X} \lrcorner dH)\wedge dt + dH$。左辺の dt の係数 $= 0$ より、$\bar{X}(H) = \frac{\partial H}{\partial t}$　$\therefore \bar{X} \lrcorner \omega = dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt$。局所表示は (3.3) に

よる。逆は局所表示より明らか．

<u>6.3 系</u>　$H_t(x)=H(x,t)$，N 上のベクトル場 X_t を $(X_t)_x=\bar{X}_{(x,t)}-\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,t)}$ と定義すると．$X_t=X_{dH_t}$.

<u>6.4 系</u>　$\bar{X}(H)=\frac{\partial H}{\partial t}$　従って．H が $\bar{X}$ の積分 $\Leftrightarrow$ H は t に無関係．

<u>6.5 定義</u>　微分同相 $\bar{\varphi}: N\times R$ ↻ が 正準変換とは．

(i) $\bar{\varphi}$ は time preserving 即ち．$\bar{\varphi}(x,t)=(\varphi_t(x),t)$．$\varphi_t: N$ ↻

(ii) $W_{\bar{\varphi}}: N\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ が存在して $\bar{\varphi}^*\omega=\omega-dW_{\bar{\varphi}}\wedge dt$

<u>6.6 定理</u>　$\bar{\varphi},\bar{\psi}$ が正準変換なら．$\bar{\varphi}^{-1},\bar{\psi}\circ\bar{\varphi}$ も正準変換であり．

$$W_{\bar{\varphi}^{-1}}=-(\bar{\varphi}^{-1})^*W_{\bar{\varphi}},\quad W_{\bar{\psi}\circ\bar{\varphi}}=\bar{\psi}^*W_{\bar{\varphi}}+W_{\bar{\psi}}$$

となる。特に正準変換の集合は群をなす。

証明は単なる計算である．

<u>6.7 定理</u>　$\bar{\varphi}$ が正準変換 $\bar{X}$ が Hamilton 場なら $\bar{\varphi}^*\bar{X}$ も Hamilton 場で．Hamiltonian は $H_{\bar{\varphi}^*\bar{X}}=W_{\bar{\varphi}}-\bar{\varphi}^*H_{\bar{X}}$ となる．

<u>証明</u>　$(\bar{\varphi}^*\bar{X})\lrcorner(\omega-d(W_{\bar{\varphi}}-\bar{\varphi}^*H_x)\wedge dt)=(\bar{\varphi}^*\bar{X})\lrcorner(\bar{\varphi}^*\omega+\bar{\varphi}^*(dH\wedge dt))$

$$=\bar{\varphi}^*(\bar{X}\lrcorner(\omega+dH\wedge dt))=0.$$

<u>6.8 定理</u>　$\bar{X}$ を Hamilton 場．$\varphi_t(x)$ を $t=0$ で $(x,0)$ を通る $\bar{X}$ の解とする．$\bar{\varphi}(x,t)=(\varphi_t(x),t)$ とおくと．$\bar{\varphi}_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,t)}=\bar{X}_{(\varphi_t(x),t)}$ であるが．$\bar{\varphi}$ は正準変換となる。即ち $\bar{X}$ は正準変換により．自明なベクトル場 $\frac{\partial}{\partial t}$ にうつされる．

<u>証明</u>　$i_t: N\longrightarrow N\times\mathbb{R}$ を $i_t(x)=(x,t)$ で定義すると．$(i_t)^*\bar{\varphi}^*\omega=\varphi_t^*\Omega$.
$\frac{d}{ds}\varphi_s^*\Omega=\varphi_s^*L_{X_s}\Omega=0$ (3.5) より．$\Omega=\varphi_0^*\Omega=\varphi_t^*\Omega=i_t^*\bar{\varphi}^*\omega$.

従って $\overline{\varphi}^*\omega=\omega-\theta\wedge dt$, θは1形式, と表わせる。$(\frac{\partial}{\partial t})\lrcorner\overline{\varphi}^*\omega$
$=\overline{\varphi}^*((\overline{\varphi}_*\frac{\partial}{\partial t})\lrcorner\omega)=\overline{\varphi}^*(X\lrcorner\omega)=\overline{\varphi}^*(dH-\frac{\partial H}{\partial t}dt)$. 他方、$(\frac{\partial}{\partial t})\lrcorner(\omega-\theta\wedge dt)$
$=\theta-\theta(\frac{\partial}{\partial t})\cdot dt$ より、$\theta=d\overline{\varphi}^*H$ とおけば. $\overline{\varphi}^*\omega=\omega-d(\overline{\varphi}^*H)\wedge dt$
となり、$\overline{\varphi}$ は正準変換である.

<u>6.9. 系</u> $\varphi_t:N\longrightarrow N$ は $\varphi_t^*\Omega=\Omega$ をみたす. 従って §5 で述べた性質は. time dependent の場合も(修正すれば)なりたつ.

<u>6.10. 系</u> $\overline{\varphi}:N\times\mathbb{R}\circlearrowleft$ が time preserving 微分同相, $\overline{X}$ は Hamilton 場とする。この時 $\overline{\varphi}$が正準変換 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\varphi}_*\overline{X}$ が Hamilton 場.

§7 Legendre 変換.

ここでは Lagrange の方程式から Hamilton 場を導く. Lagrange の方程式を大域的に定式化するのは可能だが([1], [2]) 面倒なので局所表示を用いることにする。

<u>7.1.</u> Lagrange の方程式は TM 上の関数 L に対し. M 上の 2 階の方程式 $\frac{dq^i}{dt}=\dot{q}^i$, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$ と表わされる。これは変分問題の解として得られるから. 座標のとり方に依らない形をしている([3] その他力学の本参照)

<u>7.2.</u> TM上のベクトル場 X が Lagrange の方程式をみたすとは $X=\sum\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\sum a^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$ と表わした時. 関数 a^i が

$$\sum_j\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}\dot{q}^j+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}a^j\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0 \quad i=1,2,\cdots,n$$

をみたすことである。但し. $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}\right)\neq 0$ の時に限り a^iは一

意的に定まる．以下この条件を仮定する。

7.3. Legendre変換 $\mathcal{L}: TM \to T^*M$ を以下のように定義する．

$\xi, \eta \in T_xM$ に対し．$\mathcal{L}(\xi)(\eta) = D_\xi(L|T_xM)(\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{L(\xi+t\eta)-L(\xi)}{t}$

局所的には $\mathcal{L}(q^1\cdots q^n\ \dot q^1 \cdots \dot q^n) = (q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$, $q_i = q^i$, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}$ となる．

$\mathcal{L}$は局所同相であるが、簡単のため以下$\mathcal{L}$は同相と仮定する．

7.4. TM上のエネルギー関数を $E(\xi)=\mathcal{L}(\xi)(\xi)-L(\xi)$ と定義する．$E(\xi)=\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)_\xi \dot q^i(\xi) - L(\xi) = \sum p_i(\mathcal{L}(\xi))\,\dot q^i(\xi) - L(\xi)$ となる．

7.5. $H=E\circ\mathcal{L}^{-1}: T^*M \to \mathbb{R}$ とすると．$\mathcal{L}_* X = X_{dH}$．即ちLagrangeの方程式をみたすベクトル場は$\mathcal{L}$でHamilton場にうつる．

証明 $\xi=(q^1,\cdots,q^n,\dot q^1,\cdots,\dot q^n)$, $\mathcal{L}(\xi)=\ell=(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$ とすると．$q^i=q_i$ $p_i=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)_\xi$ である．(A.3.7)とEの定義より下の式を得る．

(1) $\mathcal{L}_*\left(\frac{\partial}{\partial q^j}\right)_\xi = \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot q^i}\right)_\xi \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell + \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_\ell$

(2) $\mathcal{L}_*\left(\frac{\partial}{\partial \dot q^j}\right)_\xi = \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^j \partial \dot q^i}\right)_\xi \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell$

(3) $\left(\frac{\partial E}{\partial q^j}\right)_\xi = \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot q^i}\right)_\xi \dot q^i - \left(\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)_\xi$ (4) $\left(\frac{\partial E}{\partial \dot q^j}\right)_\xi = \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^j \partial \dot q^i}\right)_\xi \dot q^i$

(2)より $\left(\frac{\partial E}{\partial \dot q^j}\right)_\xi = \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^j\partial\dot q^i}\right)_\xi \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_\ell$ ∴(4)より．$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_\ell = \dot q^i(\xi)$．

(1)より．$\left(\frac{\partial E}{\partial q^j}\right)_\xi = \sum_i\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot q^i}\right)_\xi\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_\ell + \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_\ell = \sum_i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot q^i}\right)_\xi \dot q^i(\xi) + \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_\ell$．

∴(3)より．$\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_\ell = -\left(\frac{\partial L}{\partial q^j}\right)_\xi$．

∴ $\mathcal{L}_*\left(\sum_j \dot q^j \frac{\partial}{\partial q^j}\right)_\xi = \sum_{i,j}\dot q^j(\xi)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot q^i}\right)_\xi\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell + \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)_\ell \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_\ell$

$$\mathcal{L}_*\left(\sum_j a^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right)_\xi = \sum_{i,j} a^j(\xi)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right)_\xi \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)_\xi \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell - \sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\right)_\xi \dot{q}^j(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right)_\ell$$

$$\therefore \mathcal{L}_*(X_\xi) = \sum_j \left\{\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)_\ell \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)_\ell - \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)_\ell \left(\frac{\partial}{\partial p_j}\right)_\ell\right\}.$$

<u>7.6.</u> Tを運動エネルギー，Uをポテンシャルとすると $L=T-\bar{U}$ $(\bar{U}=U\circ\pi)$ となることが力学で知られている。多くの場合，Tは速度成分の二次形式で表わされる。即ち M上の Riemann 計量により $T(\xi)=\frac{1}{2}\|\xi\|^2=\sum g_{ij}(\pi(\xi))\dot{q}^i(\xi)\dot{q}^j(\xi)$ となる．$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right)=\det(g_{ij})$ であるから，(g_{ij}) が正定値でなくても，非退化であれば（この時，M上の pseudo-Riemann 計量と言う）Legendre 変換 $\mathcal{L}_g$（§1で与えられたもの）により Hamilton 場が定まる。

<u>7.7.</u> 上の場合，$E(\xi)=\sum g_{ij}(\pi(\xi))\dot{q}^i(\xi)\dot{q}^j(\xi)-(T(\xi)-U(\pi(\xi)))=T(\xi)+U(\pi(\xi))$ となり，E及び $H=E\circ\mathcal{L}_g^{-1}$ は全エネルギーと一致する．又，$H(\ell)=\frac{1}{2}\|\ell\|^2+U(\bar{\pi}(\ell))$ である。

Appendix. 線形代数，微分形式論からの準備．

<u>A.1. 外積代数</u>（[S]による．本により係数が異っている）

<u>A.1.1.</u> Vをm次元実線形空間．$\Lambda^g(V)=\{\omega:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{g}\longrightarrow\mathbb{R}\mid \omega$は多重線形で反対称，即ち $\omega(\cdots v_i\cdots v_j\cdots)=-\omega(\cdots v_j\cdots v_i\cdots)\}$ と定義する。$\Lambda^g(V)$ は $\binom{m}{g}$次元線形空間である。$\Lambda^0(V)\cong\mathbb{R}$ とおく．$\Lambda^1(V)$

$=V^*=\{\ell: V \longrightarrow \mathbb{R}:$ 線形$\}$ は V 上の一次形式の空間で、これを V の双対空間と言う. 又 $\Lambda^k(V)=\{0\}$ $k<0$ 又は $k>m$ とする。

A.1.2. $\omega_1 \in \Lambda^i(V)$, $\omega_2 \in \Lambda^j(V)$ の外積 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^{i+j}(V)$ を $v_k \in V$ として.

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \cdots, v_{i+j}) = \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma \in S_{i+j}} \omega_1(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(i)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(i+1)}, \cdots, v_{\sigma(i+j)})$$

但し S_{i+j} は $i+j$ 次対称群. で定義する. $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{ij} \omega_2 \wedge \omega_1$, $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$ がなりたつ. $\omega_1, \cdots, \omega_k \in V^*$ の時. $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))$ となる。

A.1.3. $v \in V$, $\omega \in \Lambda^p(V)$ に対し内部積 $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{p-1}(V)$ を.

$(v \lrcorner \omega)(v_1, \cdots, v_{p-1}) = \omega(v, v_1, \cdots, v_{p-1})$ で定義する。$\omega \in \Lambda^p(V)$, $\theta \in \Lambda^q(V)$ に対し. $v \lrcorner (\omega \wedge \theta) = (v \lrcorner \omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \theta)$ となる。

A.1.4. 線形写像 $f: V \longrightarrow W$ に対し. $f^*: \Lambda^q(W) \longrightarrow \Lambda^q(V)$ が. $(f^*\omega)(v_1, \cdots, v_q) = \omega(f(v_1), \cdots, f(v_q))$ で定まる。明らかに $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$, $f^*(f(v) \lrcorner \omega) = v \lrcorner f^*\omega$ である. $g: W \longrightarrow X$ が線形なら. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: \Lambda^q(X) \longrightarrow \Lambda^q(V)$ である。

A.1.5. $\langle e_1, \cdots, e_m \rangle$ が V の基である時. $e_i^* \in V^*$ を $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ で定義すると. $\langle e_1^*, \cdots, e_m^* \rangle$ は V^* の基となる. これを $\langle e_1, \cdots, e_m \rangle$ の双対基と言う. $\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_q}^* \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq m\}$ は $\Lambda^q(V)$ の基となる。特に $\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge \cdots \wedge e_m^*\}$ は $\Lambda^m(V) \cong \mathbb{R}$ の基である。

A.2. V 上の Symplectic 形式 ([1] 参照)

A.2.1. $\Lambda^2(V) \ni \Omega$ に対し. $\lrcorner \Omega: V \longrightarrow V^*$ が, $v, v' \in V$ として. $(v \lrcorner \Omega)(v') = \Omega(v, v')$ として定まる。これが同型写像である

時、ΩをV上のSymplectic形式と言う. Symplectic形式が存在すれば. $\dim V=2n$である.

A.2.2. Symplectic形式ΩはVの適当な基$\langle e_1,\cdots,e_{2n}\rangle$をとれば$\Omega=\sum_{i=1}^{n}e_i^*\wedge e_{n+i}^*$と表わされる。$v=\sum_{i=1}^{n}(a_ie_i+b_ie_{i+n})$に対して. $v\lrcorner\Omega=\sum_{i=1}^{n}(-b_ie_i^*+a_ie_{i+n}^*)$となる。又 $\overbrace{\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega}^{n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!\cdot e_1^*\wedge\cdots\wedge e_n^*\wedge e_{n+1}^*\wedge\cdots\wedge e_{2n}^*$である。

A.2.3. 線形写像$f:V\longrightarrow V$が$f^*\Omega=\Omega$をみたす時. fをSymplectic変換と言う. この時fの固有値は$\lambda,-\lambda,\bar{\lambda},-\bar{\lambda}$が同じ重複度で現れ. ±1の重複度は偶数である。

A.3. 多様体, ベクトル場, 微分形式. ([5],[7] その他)

A.3.1. Mをn次元多様体. $\{(U_\alpha,\alpha)\}$をMの局所座標系とする. 即ち. $M=\cup U_\alpha$, $\alpha:U_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}^n$は中への同相写像で. $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$なら$\alpha\circ\beta^{-1}:\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\longrightarrow\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\subset\mathbb{R}^n$は微分同相. $\alpha(x)=(x^1(x),\cdots,x^n(x))\in\mathbb{R}^n$と表わした時. 曲線$c^i(t)=\alpha^{-1}(c^1,\cdots,c^i+t,\cdots c^n)$ (但し. $\alpha(x)=(c^1,\cdots,c^n)$) の$t=0$での"接ベクトル"を$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$と表わす. xでの"接ベクトル"の全体をT_xMで表わすと. T_xMは. $\langle\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x\rangle$を基とする線形空間である。$T_xM$の双対空間を$T_x^*M$で表わす. $\langle\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x\rangle$の双対基を$\langle(dx^1)_x,\cdots,(dx^n)_x\rangle$で表わす.

A.3.1. bis $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$が$C^\infty$-級とは. 各$(U_\alpha,\alpha)$について$f\circ\alpha^{-1}:\alpha(U_\alpha)\longrightarrow\mathbb{R}$が$C^\infty$級であることを言う. ($M$の部分集合で定義さ

れた関数についても同様) $\left(\frac{\partial f\circ\alpha^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\alpha(x)}$ を $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_x$ と略記する.

M_1 が n 次元, M_2 が m 次元多様体の時. 写像 $\varphi: M_1\to M_2$ が C^∞-級とは. $y=\varphi(x)$ として. M_1 の局所座標 (U_1,α_1), $\alpha_1(x)=(x^1,\cdots,x^n)$, M_2 の局所座標 (U_2,α_2), $\alpha_2(y)=(y^1,\cdots,y^m)$ をとった時. $\alpha_2\circ\varphi\circ\alpha_1^{-1}:(x^1,\cdots,x^n)\longrightarrow(y^1,\cdots,y^m)$ が C^∞-級のことを言う. 更に φ が 1:1, onto の時 φ を微分同相と言う. この時 φ^{-1} も微分同相である.

A.3.2. X が M 上のベクトル場であるとは. $\forall x\in M$ に対し. $X_x\in T_xM$ が定まることを言う. 局所的に関数 $a^i:U_\alpha\longrightarrow\mathbb{R}$ により $x\in U_\alpha$ の時 $X_x=\sum_{i=1}^n a^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ と表わされるが. a^i は C^∞-級とする. $X=\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ と略記することもある。

A.3.3. $\{\varphi_t\mid\varphi_t:M\longrightarrow M,\ t\in\mathbb{R}\}$ が X の生成する flow (又は簡単に X の解) とは. 曲線 $\{\varphi_t(x)\}$ の $t=0$ での接ベクトルが X_x となっていることを言う. 局所的には $X=\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ の時. $\alpha\circ\varphi_t(x)$ は. 微分方程式 $\frac{dx^i}{dt}=a^i(\alpha^{-1}(x^1,\cdots,x^n))$ $i=1,2,\cdots,n$, の $t=0$ で $\alpha(x)$ となる解を表わしている. この意味でベクトル場と微分方程式を同一視することもある. φ_t は微分同相であり. $\varphi_t^{-1}=\varphi_{-t}$, $\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}$ である。(なお $\varphi_t(x)$ の存在する t の範囲が問題であるが. 簡単のため $\forall t$ について存在するものとした. この点が問題になるのは. 本稿では. (5.4) だけである。)

A.3.4. X の解を $\{\varphi_t\}$, $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ に対し. $X(f)_x=\lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(x))-f(x)}{t}$ として M 上の関数 $X(f)$ を定義する. 局所的には. $X=\sum a_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ に

$X(f)_x = \sum a_i(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_x$ である。 $F: M \longrightarrow \mathbb{R}$ が X の(第一)積分とは、$X(F) = 0$, 即ち $F(\varphi_t(x)) = F(x)$, 即ち、解 $\varphi_t(x)$ が"曲面" $F = const.$ の上を動くことを言う。

<u>A.3.5.</u> ω が M 上の k(微分)形式とは $x \in M$ に $\omega_x \in \Lambda^k(T_xM)$ が対応することを言う。局所的に $\omega_x = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(x)(dx^{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_x$ と書けるが、$a_{i_1\cdots i_k}$ は C^∞-級とする。特に0形式は M 上の C^∞ 関数である。$\forall x \in M$ で $\omega_x \neq 0$ となる n 形式を M 上の体積要素と言う。M 上の k 形式の集合を $\Lambda^k(M)$ で表わす。

$\omega_1 \in \Lambda^k(M)$, $\omega_2 \in \Lambda^l(M)$ に対し $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^{k+l}(M)$ が $(\omega_1 \wedge \omega_2)_x = \omega_{1x} \wedge \omega_{2x}$, ベクトル場 X, $\omega \in \Lambda^k(M)$ に対し $X \lrcorner \omega \in \Lambda^{k-1}(M)$ が、$(X \lrcorner \omega)_x = X_x \lrcorner \omega_x$ として定まり、(A.1.2)(A.1.3)の性質をもつ。

<u>A.3.6.</u> 各 k に対し $\mathbb{R}$-線形写像 $d: \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(M)$ を、$k=0$ に対しては $(df)(X) = Xf$ で定め、$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$ for $\omega_1 \in \Lambda^k(M)$, 及び $d \circ d\omega = 0$ をみたすものとして帰納的に定義すれば $d\omega$ は一意的に定まる。局所的には、$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, $d(\sum a_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \sum da_{i_1\cdots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ と表わされる。$\Lambda^k(M) \ni \omega$ が閉 k 形式とは $d\omega = 0$ となることを言う。この時、$\forall x$ に対し近傍 U が存在して、$\omega|U = d\omega'$, $\omega' \in \Lambda^{k-1}(U)$ となる。

<u>A.3.7.</u> $\varphi: M_1 \to M_2$ に対し、$\varphi_*: T_xM_1 \longrightarrow T_{\varphi(x)}M_2$ が自然に(M_1 の曲線 C の接ベクトルに M_2 の曲線 $\varphi \circ C$ の接ベクトルを対応させて)定義できる。φ_* は線形である。又 $\varphi^*: T^*_{\varphi(x)}M_2 \longrightarrow T^*_xM_1$ が、

$\varphi^*(\ell)(\xi)=\ell(\varphi_*\xi)$, $\ell\in T^*_{\varphi(x)}M_2$, $\xi\in T_xM_1$, として定義できる。局所的には (A,3,1,bis) の記号で. $y^i=\varphi^i(x^1,\cdots,x^n)$ と表わされた時.

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x=\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)_x\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_y,\quad \varphi_*\left(\sum a^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_{i,j}(a^j\circ\varphi^{-1})\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\varphi^*(dy^i)_y=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)_x(dx^j)_x,\quad \varphi^*\left(\sum b_i\,dy^i\right)=\sum(b_i\circ\varphi)\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}dx^j.$$

と表わされる。

$T\varphi:TM_1\longrightarrow TM_2$ が $(T\varphi)(\xi)=\varphi_*\xi$ として定義でき $\pi_2\circ T\varphi=\varphi\circ\pi_1$ ($\pi_i:TM_i\rightarrow M_i$) である. ($TM$ の定義は (1.1)).

A.3.8 微分同相 $\varphi:M_1\rightarrow M_2$ に対し. $T^*\varphi:T^*M_1\longrightarrow T^*M_2$ が $T^*\varphi(\ell)=(\varphi^{-1})^*\ell$ として定義でき. $\bar\pi_2\circ T^*\varphi=\varphi\circ\bar\pi_1$ ($\bar\pi_i:T^*M_i\longrightarrow M_i$) となる。又 M_1 上のベクトル場 X に対し M_2 上のベクトル場 φ_*X が $(\varphi_*X)_y=\varphi_*X_x$, $y=\varphi(x)$, として定義できる. M_2 上のベクトル場 Y に対し. $\varphi^*Y=(\varphi^{-1})_*Y$ と定義する。

A.3.9. $M_1\xrightarrow{\varphi}M_2\xrightarrow{\psi}M_3$ に対し. $T(\psi\circ\varphi)=(T\psi)\circ(T\varphi)$, $T^*(\psi\circ\varphi)=T^*\psi\circ T^*\varphi$, $(\psi\circ\varphi)_*X=\psi_*(\varphi_*X)$, $(\psi\circ\varphi)^*\omega=\varphi^*(\psi^*\omega)$ 等がなりたつ.

A.3.10. $\varphi:M_1\longrightarrow M_2$ に対し. $\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\varphi^*\omega_1\wedge\varphi^*\omega_2$, $d(\varphi^*\omega)=\varphi^*(d\omega)$, $\varphi^*(X\lrcorner\,\omega)=(\varphi^*X)\lrcorner\,\varphi^*\omega$ 但し φ は微分同相, がなりたつ

A.3.11 ベクトル場 X と $\omega\in\Lambda^k(M)$ に対し. Lie微分 $L_X\omega\in\Lambda^k(M)$ を. $L_X\omega=\lim_{t\to0}(\varphi_t^*\omega-\omega)/t$, $\{\varphi_t\}$ は X の解, として定義する. $f\in\Lambda^0(M)$ に対しては $L_Xf=Xf$ である。又ベクトル場 X,Y の

Lie bracket $[X,Y]$ を $[X,Y]=L_X Y=\lim_{t\to 0}(\varphi_t^* Y-Y)/t$ として定義すると. $[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$ となる。

$$L_X(\omega_1\wedge\omega_2)=L_X\omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge L_X\omega_2,\quad dL_X\omega=L_X d\omega$$

$$L_X\omega=X\lrcorner(d\omega)+d(X\lrcorner\omega)$$

$$L_X(Y\lrcorner\omega)=[X,Y]\lrcorner\omega+Y\lrcorner(L_X\omega)$$

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \quad (\text{Jacobi 律})$$

がなりたつ.

参考文献

[1] R. Abraham; Foundations of Mechanics. Benjamin 1967.

[2] C. Godbillon; Géométrie Différentielle et Méchanique Analytique. Hermann 1969.

[3] C. Lanczos; The Variational Principles of Mechanics. Univ. of Tronto Press 1949.

[4] Loomis-Sternberg: Advanced Calculus. Addison-Wesley 1968.

[5] 松島与三; 多様体入門. 裳華房 1965.

[6] Siegel-Moser; Lectures on Celestial Mechanics. Springer 1971.

[7] Sternberg; Lectures on Differential Geometry. Prentice Hall 1964 (吉岡書店より日本語版)